1. Определим *ζ-функцию Гурвица* для $\operatorname{Re} s > 1$ и $\operatorname{Re} x > 0$ при помощи равенства

$$\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{-s}$$

и продолжим ее аналитически в область ее голоморфности в $\mathbb{C}^2$ (что из себя представляет эта область?). Докажите, что при $0 < \operatorname{Re} s < 1$ имеет место равенство

$$\int_0^1 \left(\zeta(s,x)\zeta(1-s,x) - \frac{1}{x} \right) dx = -\ln 2\pi + \frac{\Psi(s)+\Psi(1-s)}{2},$$

где $\Psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ – логарифмическая производная Γ-функции, C – некоторая постоянная. Чему она равна?

2. Может ли *обобщенная ζ-функция Римана*

$$\boldsymbol{\zeta}(s,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$$

быть корнем какого-либо дифференциального полинома, то есть, удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных по переменным s, z вида

$$P(f, f'_s, f'_z, f''_{ss}, f''_{sz}, f''_{zz}, \ldots) = 0,$$

где P – полином достаточно большого числа переменных с комплексными коэффициентами?

3. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \mathbb{C}$ – комплексные числа, такие, что $\operatorname{Re} \omega_j > 0$ и линейно независимые над $\mathbb{Z}$. Для $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} s > m$ определим *ζ-функцию Барнса* как сумму ряда

$$\zeta_m(s,z,\omega) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty} (z + n_1\omega_1 + \ldots + n_m\omega_m)^{-s}.$$

1) Найдите область, в которую функция $\zeta_m(s,z,\omega)$ может быть аналитически продолжена (по переменной s) при всех фиксированных значениях z, $\operatorname{Re} z > 0$.

2) Выясните характер всех особенностей функции $\zeta_m(s,z,\omega)$ (как функции переменного $s \in \mathbb{C}$) при фиксированном z и найдите вычеты в них.

4. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{\substack{m,n>0, \\ \text{НОД}(m,n)=1}} \frac{1}{m^6(m^2+n^2)},$$

где суммирование ведется по всем парам взаимно простых m, n.